

# EXTRAIT DE L'OUVRAGE

**Maurice LAURENT**

**LES JEUNES**

**LES MATHÉMATIQUES**

**LES FRACTIONS**

**UEPD**

**Une Éducation Pour Demain**

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>11</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>13</b>
1. Quelques questions	13
À qui s'adresse cet ouvrage ?	13
Quel est son objectif premier ?	13
Quelle est son originalité ?	13
Pourquoi cette tranche d'âge ?	14
2. L'approche pédagogique	15
2.1 Du côté des élèves	15
La faculté d'induire ou de généraliser	15
La faculté d'abstraire	15
La capacité à faire des images mentales et à les évoquer	16
2.2 Du côté des mathématiques	16
2.3 Du côté des enseignants	17
<b>CHAPITRE 1</b>	<b>21</b>
<b>Entrer dans l'étude des fractions</b>	<b>21</b>
1. Plier des feuilles : agir, percevoir, le dire, l'écrire	21
De dire à écrire et à lire: notation des fractions	30
2. Relations dépendant et ne dépendant pas de la mesure des longueurs	33
Du côté de la pédagogie et de la conduite de la classe	34
Du côté des mathématiques	38
Du côté des prises de conscience	42
<b>CHAPITRE 2</b>	<b>45</b>
<b>Fractions équivalentes à 1 et nombres entiers</b>	<b>45</b>
1. Les fractions équivalentes au nombre 1	45
2. Tout nombre entier vu comme une classe de fractions équivalentes	53

## **CHAPITRE 3** **63**

### **Associer nombres entiers et fractions** **63**

1. Associer un entier et une fraction inférieure à l'unité 63
2. Où l'on retrouve la coprésence des opérations addition et soustraction 70
3. Extraire le plus grand nombre entier possible d'une fraction plus grande que l'unité 73
4. La demi-droite numérique : associer des nombres entiers et des fractions à des points 76
  - 4.1 Solliciter l'imagerie mentale 77
  - 4.2 Graduer une demi-droite 79

## **CHAPITRE 4** **87**

### **Des suites de fractions équivalentes** **87**

1. La famille de deux tiers 87
  - Première partie 87
  - Deuxième partie 92
2. Transfert des acquis à n'importe quelle fraction 95
3. Énoncer la propriété fondamentale des fractions équivalentes 98
4. Aborder la simplification des fractions 105
5. Engendrer autrement des fractions équivalentes 107
  - 5.1 Donner suite à la proposition de Margaux 107
  - 5.2 Du côté de la construction des savoirs 109
    - Le rôle primordial des images mentales 109
    - Les limites de l'action dans le monde physique 110
    - De l'égoïsme à l'universalité 110
  - La propriété fondamentale des fractions : les écueils de langage et de compréhension à laisser émerger pour les éradiquer 111
  - 5.3 Du côté du processus de mathématisation 112
  - 5.4 Du côté des mathématiques 113
    - L'utilisation de la règle de trois 114
  - La pratique continue des tables de multiplication 115
  - La composition des opérateurs multiplicatifs 115

## CHAPITRE 5 117

<b>Fraction d'un ensemble discret d'objets</b>	<b>117</b>
1. Fraction d'un <i>nombre de...</i> et d'un entier	117
2. Fractions et diviseurs d'un nombre entier	124
Du côté des prises de conscience	131
3. Un problème de notation délicat : du mot <i>de</i> au signe <i>fois</i> ( $\times$ )	133
4. Fraction d'un nombre : gestes mentaux effectués et leur notation	135
5. Trouver un nombre dont on connaît une fraction	137
5.1. Comprendre et résoudre le problème	137
5.2. Utiliser l'acquis pour créer et résoudre des problèmes variés	141
5.3. La règle de trois : les opérations mentales successives	143
5.4. Passer du numérique au littéral	145
5.5. Du côté du sens et des compréhensions	147

## CHAPITRE 6 149

<b>Des fractions aux nombres décimaux</b>	<b>149</b>
1. Plier une feuille en 10, les dixièmes	151
2. Introduire le code à virgule, les dixièmes	152
3. Feuille pliée en 100, les centièmes	154
4. Introduire le code à virgule, les centièmes	155
5. Extension aux millièmes, dix-millièmes, etc.	157
6. Fractions quotients et nombres décimaux	157
7. Comparer et ordonner des nombres décimaux	162
8. Les 4 opérations	164
8.1. L'addition et la soustraction	164
8.2. La multiplication et la division	166
8.3. Multiplier ou diviser un nombre décimal par 10, 100, 1000, etc.	167
9. Demi-droite numérique, fractions décimales et nombres décimaux	169
10. Mesure des lignes, des surfaces et des solides. Les unités et les changements d'unités. La division avec diviseur décimal.	175
10.1 Mesure des lignes, les unités de longueur	176
10.2 Mesures des surfaces : les unités d'aire	178
10.3 Mesure des solides : les unités de volume	180
10.4 Les changements d'unité	182
Les changements d'unité de longueur	182

Les changements d'unité d'aire et de volume	186
10.5 La division avec diviseur décimal	186
<b>CHAPITRE 7</b>	<b>191</b>
<b>Les fractions quotients</b>	<b>191</b>
1. Partager puis multiplier : fractions opérateurs	191
2. Multiplier puis partager : fractions quotients	192
2.1 Première catégorie de fractions quotients : division partage	192
Du côté de la pédagogie	200
2.2 Deuxième catégorie de fractions quotients : division contenance	201
3. Considérer ensemble les fractions opérateurs et les fractions quotients	203
4. Calculer la valeur décimale d'une fraction	206
5. Reconnaître les fractions décimales	208
6. Valeur décimale d'une fraction : retour sur la propriété des fractions équivalentes	211
7. Retrouver une fraction connaissant sa partie décimale périodique	217
8. Calculer une période sans effectuer le quotient	219
9. Preuve de la propriété des fractions équivalentes	221
9.1 Les prérequis	221
9.2 Preuve de la propriété des fractions équivalentes	223
<b>CHAPITRE 8</b>	<b>227</b>
<b>Les opérations dans l'ensemble des fractions Addition et soustraction</b>	<b>227</b>
1. Les prérequis à disposition	227
2. Repartir avec des feuilles pliées	228
Du côté de la pédagogie et des mathématiques	232
3. Repartir des fractions équivalentes	233
Du côté de la pédagogie et des mathématiques	238
4. Partir des fractions opérant sur un entier	238
Du côté de la pédagogie et des mathématiques	241
5. Utiliser un outil validé : la propriété fondamentale des fractions	242
Du côté de la pédagogie et des mathématiques	245
6. Penser à utiliser le PPCM de 2 nombres	245
7. Transférer les acquis aux fractions munies d'un signe positif ou négatif	247

7.1 Ajouter des nombres entiers positifs et négatifs	248
7.1.1 Droite numérique et déplacements	248
7.1.2 Transfert à l'addition des fractions munies d'un signe	252
7.1.3 Simplification de la notation	253
7.2 Soustraire des nombres entiers positifs et négatifs	254
7.2.1 Les prérequis indispensables.	254
7.2.2 Soustraire un entier, c'est ajouter son opposé	257
7.3. Soustraction dans les nombres rationnels	260
Du côté de la pédagogie et des mathématiques	261

## CHAPITRE 9 263

<b>Opérations dans l'ensemble des fractions Multiplication et division</b>	<b>263</b>
1. Multiplication des fractions ordinaires	263
1.1 Revenir aux feuilles pliées	263
1.2 Prendre conscience de la commutativité des opérateurs fractionnaires multiplicatifs	266
1.3 Opérer sur des nombres entiers naturels	268
1.4 S'appuyer sur ce qu'on sait déjà faire	269
Du côté de la pédagogie et des mathématiques.	273
1.5 Mettre l'accent sur les fractions inverses	273
1.6 Illustrer géométriquement le produit de deux fractions	275
1.7 Penser à utiliser le PPCM de 2 nombres	277
1.8 Simplifier avant de calculer	278
1.9 Retour sur l'équivalence <b>de = fois = ×</b>	280
1.10 Du concret au numérique et vice-versa	280
1.11 Multiplication de 2 nombres décimaux	282
Du côté de la pédagogie et des mathématiques	286
2. Multiplication des nombres relatifs	287
2.1 Multiplication des nombres entiers relatifs	287
Du côté de la pédagogie et des mathématiques	291
2.2 Quotient de 2 nombres entiers relatifs	293
3. Transfert au calcul dans l'ensemble des nombres rationnels	294
Simplification de la notation écrite : conventions	295
4. Division des fractions ordinaires	296
4.1 Première approche : utilisation de la proportionnalité	296
4.2 Deuxième approche : <b>si <math>ab = c</math> alors <math>a = c \div b</math></b>	302

4.3 Cas de la division d'une fraction par un entier ou un décimal	307
5. Division dans l'ensemble des rationnels	308
6. Vue globale des ensembles $N$ , $Z$ et $Q$	309

## **CHAPITRE 10** **311**

<b>Fractions rapports Grandeurs proportionnelles Pourcentages et échelles</b>	<b>311</b>
1. Rapport de deux grandeurs de même nature	312
1.1 Rapports et fractionnements : manipulations	312
Avec des enfants de 9 à 11 ans	312
Avec des jeunes de 12 à 14 ans	316
1.2 Rapports et fractionnements : évoquer et dessiner	321
1.3 Rapports et similitude	323
1.4 Rapports et mesures	328
1.5 Rapports et grandeurs proportionnelles	333
1.6 Rapports et proportions	336
1.7 Quatrième proportionnelle	339
2. Rapport de deux grandeurs de nature différente	343
3. Rapports, grandeurs proportionnelles : bilan	348
Du côté de la situation mathématique utilisée	354
4. Rapports, pourcentages, échelles	356
4.1 Les problèmes de pourcentages	356
4.1.1 Rapports et pourcentages	356
4.1.2 Transformer un rapport en une fraction de dénominateur 1	357
4.1.3 Transformer un rapport de dénominateur 1 en un rapport de dénominateur 100 : le rapport pourcentage	361
Du côté des mathématiques et de la pédagogie.	366
4.2 Les problèmes d'échelles	368

# Chapitre 3

## Associer nombres entiers et fractions

Si, tout en continuant à considérer les feuilles pliées en 2, 3, 4, etc. et celles non pliées, nous opérons un tout petit changement de point de vue, d'autres prises de conscience significatives vont pouvoir être facilement amenées chez tous les élèves.

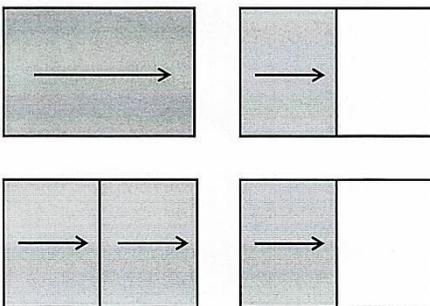
Faisons le point ! Ils savent d'une part – chapitre 1 – que l'on peut considérer n'importe quelle fraction d'une feuille, puisqu'on peut imaginer qu'on la plie en autant de parties superposables qu'on veut. Ils savent d'autre part – chapitre 2 – que tout nombre entier est équivalent à une classe illimitée de fractions.

Les élèves ont ainsi à disposition tous les outils nécessaires à l'addition de n'importe quel nombre entier avec n'importe quelle fraction plus petite que 1, et sont de même équipés pour extraire les entiers de fractions plus grandes que l'unité.

### 1. Associer un entier et une fraction inférieure à l'unité

Les feuilles correspondant à la figure 1 ont été affichées.

Figure 1

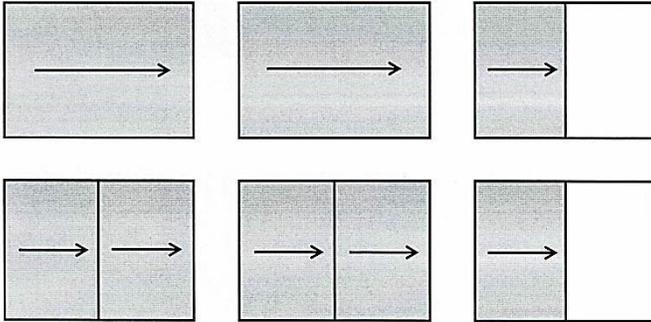


Avec son pointeur, balayant les surfaces des 2 alignements de feuilles, de gauche à droite, d'abord en haut, puis en bas, et toujours sans rien dire, l'enseignant conduira facilement le groupe à énoncer la phrase qui suit (Figure 1).

$$1f + \frac{1}{2}f = \frac{2}{2}f + \frac{1}{2}f = \frac{3}{2}f$$

Alors, il suffira d'ajouter 1 feuille à gauche de celles déjà en place, comme sur la figure 2, pour que les élèves voient et lisent :

**Figure 2**



E.

$$2f + \frac{1}{2}f = \frac{2}{2}f + \frac{2}{2}f + \frac{1}{2}f = 2 \times \frac{2}{2}f + \frac{1}{2}f = \frac{4}{2}f + \frac{1}{2}f = \frac{5}{2}f$$

M. Imaginez maintenant que j'ajoute encore à gauche 8 feuilles non pliées et en-dessous 8 autres pliées en 2, et que vous ne parliez plus de feuilles !

E.

$$10 + \frac{1}{2} = \overbrace{\frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{2}{2}}^{10 \text{ fois}} + \frac{1}{2} = 10 \times \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{20}{2} + \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$$

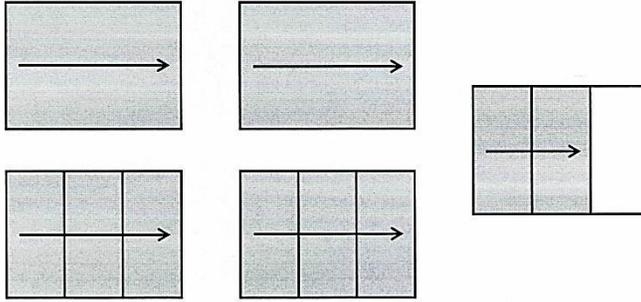
M. Et si l'on avait maintenant  $n$  feuilles entières et en-dessous  $n$  feuilles pliées en 2, toujours avec  $\frac{1}{2}f$  à droite ?

E.

$$n + \frac{1}{2} = \overbrace{\frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{2}{2}}^{n \text{ fois}} + \frac{1}{2} = n \times \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2n + 1}{2}$$

M. J'affiche de nouvelles feuilles ! Regardez et lisez ! (Figure 3)

Figure 3



E.

$$2 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 2 \times \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Le maître demandera ensuite au groupe de considérer virtuellement des nombres de plus en plus grands de feuilles entières pliées en 3, à associer toujours aux deux tiers d'une feuille. Ainsi, autant d'expressions que nécessaire, calquées sur la dernière ci-dessus, pourront être produites oralement, mais seulement oralement, afin que beaucoup d'expérience soit acquise en un minimum de temps.

Jusque-là, les élèves semblent avoir bien compris comment il est possible de fusionner par l'opération addition un nombre entier et une fraction plus petite que l'unité afin d'obtenir une seule fraction. Mais le maître est conscient qu'ils ont été guidés par les feuilles affichées, et que certains d'entre eux n'ont sans doute pas fait toutes les prises de conscience nécessaires pour que la démarche mentale soit comprise et que ce savoir-faire soit définitivement acquis. Aussi va-t-il proposer une situation légèrement différente qui lui permettra de savoir précisément où en est chacun d'entre eux.

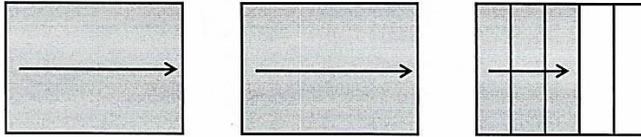
Cette fois, seules les feuilles que montre la figure 4 seront affichées.

*M. Qui saurait d'abord lire cette somme, puis la transformer en une seule fraction ?*

*E. C'est facile, s'avance Tabata, qui se justifie pleinement en énonçant sans hésiter : deux plus trois cinquièmes, c'est la même*

chose que deux fois cinq cinquièmes plus trois cinquièmes, ce qui fait treize cinquièmes (Figure 4).

**Figure 4**



$$2 + \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

Plusieurs visages montrent que le discours correct mais trop rapide de Tabata n'a pas été compris.

*M. Viens redire exactement la même chose, Tabata, mais plus lentement et en le montrant, s'il te plaît !...*

Tout le monde ayant maintenant compris, le maître change la feuille de droite (Figure 5).

*M. Est-ce que tout le monde saurait dire ce qu'il faut voir et se dire pour aboutir à une seule fraction ? Qui est sûr ?... Qui ne l'est pas ?... Les trois qui ne sont pas encore sûrs vont le devenir. Qui donne la réponse ?*

**Figure 5**



$$2 + \frac{5}{8} = 2 \times \frac{8}{8} + \frac{5}{8} = \frac{16}{8} + \frac{5}{8} = \frac{21}{8}$$

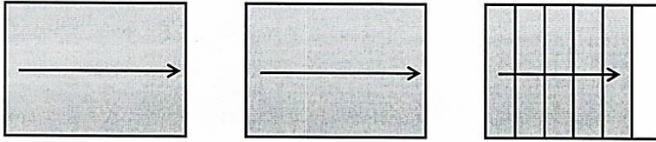
*M. Encore un autre cas ! Quelqu'un regarde et dit ce qu'il voit, quelqu'un d'autre le montre, un dernier l'écrit, sans noter qu'il s'agit de feuilles !*

*E. Ça y est, j'ai compris, fait savoir Noa.*

E. *Moi aussi, enchaîne Kylian.*

M. *Bien, mais qu'as-tu compris, Noa ?*

**Figure 6**



$$2 + \frac{5}{6} = 2 \times \frac{6}{6} + \frac{5}{6} = \frac{12}{6} + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$$

E. *Si la feuille de droite est divisée en cinquièmes, explique Ambre, il faut voir les feuilles entières en cinquièmes aussi, mais si elle est divisée en sixièmes, il faut voir les feuilles entières en sixièmes, etc.*

E. *C'est la feuille de droite, reprend Camille, qui nous indique comment il faut fractionner celles qui ne le sont pas encore.*

M. *Et c'est toujours possible ?*

E. *Oui, se précipite Alix, parce qu'on peut imaginer qu'on plie une feuille entière en n'importe quel nombre de parties.*

Cette dernière séquence montre qu'une prise de conscience essentielle restait à forcer chez plusieurs élèves, qui seule peut assurer la pleine compréhension de l'opération : pour additionner un nombre entier et une fraction, il faut fractionner mentalement chaque unité de l'entier en autant de parties que l'indique le dénominateur de la fraction imposée, ce qu'obligent à faire les configurations des figures (4) à (6), mais ce que ne demandaient pas de faire celles des figures (1) à (3) précédentes.

Une autre prise de conscience importante est celle que met à jour Alix : quels que soient les nombres entiers et la fraction à additionner, c'est toujours possible, *parce qu'on peut – dit-elle – imaginer qu'on plie une feuille entière en n'importe quel nombre de parties.*

Une fois que ces prises de conscience ont été faites par tout le monde, une nette accélération peut être imprimée à la leçon, parce que les exercices peuvent dès lors être exécutés entièrement mentalement et en toute compréhension.

*M. D'accord Alix ! Alors, voici ma question ! On a 7 feuilles entières et 1 feuille divisée en 9, dont on considère 7 parties. Qui saurait en exprimer la somme à l'aide d'une seule fraction ?*

*E. Vous pouvez répéter, s'il vous plaît, demande Marius ?*

*M. Essaie plutôt de retrouver ce que j'ai dit !*

*E. On a 7 feuilles... et une autre pliée en 9, et on en regarde 7 petits rectangles, questionne-t-il ?*

*M. Exactement, je n'avais donc pas besoin de répéter.*

*E. J'ai trouvé la réponse, affirme Julie, et je peux expliquer pourquoi elle est juste.*

*E. Moi aussi, moi aussi, affirment peu à peu presque tous les élèves.*

Le maître s'approche de Julie, lui demande de lui chuchoter sa réponse à l'oreille, puis demande au reste du groupe :

*M. Le numérateur de la fraction de Julie est un multiple de dix. Qui a un tel numérateur dans sa réponse ?*

Quelques secondes plus tard, la plupart confirment que leur numérateur a bien la même propriété. Alors, le moment est venu pour Julie de donner sa réponse et d'expliquer comment elle l'a obtenue.

*E. Puisque la dernière feuille est divisée en 9, on divise aussi les 7 entières en 9. Une feuille, c'est neuf neuvièmes, et donc sept feuilles, c'est soixante-trois neuvièmes. On ajoute les sept neuvièmes de la dernière feuille et ça donne soixante-dix neuvièmes.*

$$7 + \frac{7}{9} = 7 \times \frac{9}{9} + \frac{7}{9} = \frac{63}{9} + \frac{7}{9} = \frac{70}{9}$$